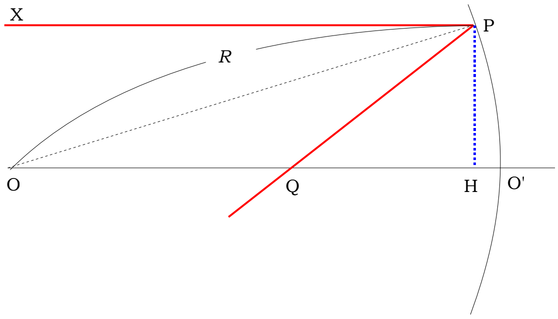
導出シリーズ　第29回　「凹面鏡の焦点距離の公式」

凹面鏡は凸レンズと同様の働きをすることが知られている。洗面台に設置されている平面鏡は普通に顔を映してくれるが、これが凹面鏡なら拡大された顔が映ることになる。遊園地などで良く見かける「ビックリミラー」だ。逆に凸面鏡の場合は、縮小された顔が映ることになる。凹面鏡は交通安全のために交差点に設置されている鏡として使われている。

→ **「凹面鏡は凸レンズの働き、凸面鏡は凹レンズの働きをする！」**

凹面鏡が凸レンズの働きをするのだから、凸レンズと同じ様に、焦点距離があるはずだ。

凹面鏡の焦点距離の公式を導出する！

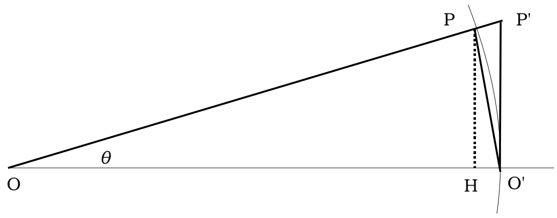


凹面鏡の球面の半径を R とする。光軸 OO' に平行にやってきた光が、右図の赤線で示すように凹面鏡で反射し、ある一点 Q に集まるように進む。

OP は凹面鏡に垂直になるので、「反射の法則」より、入射角∠POX と反射角∠OPQ は等しくなる。この角を θ とする。PH の長さを h とすると、OH は $R\sin\theta$、QH は $R\sin 2\theta$ となる。ここで、凹面鏡の球面の半径は凹面鏡の半径より十分に長いのが普通だから、球面の半径 R に比べて凹面鏡の大きさ以内である h は十分に小さくなるので、そのため角度 θ は非常に小さい値になる。よって、$\theta\approx 0$ のとき $\sin\theta\approx\theta$ の近似が使える(後述1)ので、OH:QH=1:2 となる。凹面鏡の半径 R が十分大きいとき、HO' の距離（$R-R\cos\theta$）はゼロと見なせる(後述2)から、RO' は OO' の半分となる。よって、凹面鏡の焦点距離 f は球面の半径 R の半分であることが分かる。

［参考］三角関数の近似式について

（後述1）近似式　$\sin\theta\approx\tan\theta\approx\theta$　について、



近似式「$\theta\approx 0$ のとき $\sin\theta\approx\theta$」を導けることは数学の教科書に記述されているのだが、あなたは証明できるでしょうか。右図の図形3つ（⊿QPO'、扇形 OPO'、⊿OP'O'）の面積を考えることで導出する。

⊿QPO は $\dfrac{R^2\sin\theta}{2}$ であり、扇形 OPO' は $\dfrac{R^2\theta}{2}$、⊿OP'O' は $\dfrac{R^2\tan\theta}{2}$ であり、この順に面積は大きくなる。よって、$\dfrac{R^2\sin\theta}{2}<\dfrac{R^2\theta}{2}<\dfrac{R^2\tan\theta}{2}$ だから、$\sin\theta<\theta<\tan\theta$ が成立する。$\sin\theta>0$ で割ると $1<\dfrac{\theta}{\sin\theta}<\dfrac{1}{\cos\theta}$ ・・・①が成立する。$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}=1$ だから $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$ である。よって、$\theta\approx 0$ のとき $\sin\theta\approx\theta$ が成立する。また、①に $\cos\theta$ を乗じて逆数を取ると $\dfrac{1}{\cos\theta}>\dfrac{\tan\theta}{\theta}>1$ だから、$\theta\approx 0$ のとき $\tan\theta\approx\theta$ も成立する。以上より $\sin\theta\approx\tan\theta\approx\theta$ が成立することが導出された。

（後述2）近似式　$1-\cos\theta\approx 0$　について

三角関数の公式 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$ をもとに考えよう。近似式：$\theta\approx 0$ のとき $\sin\theta\approx\theta$ と、近似式：$x\approx 0$ のとき $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x$ が成立するから $\cos\theta=1-\dfrac{\theta^2}{2}$ より、$1-\cos\theta=\dfrac{\theta^2}{2}$ だ。微小量 θ の2次の項は無視して良いので。$1-\cos\theta=0$ としてよいことになる。