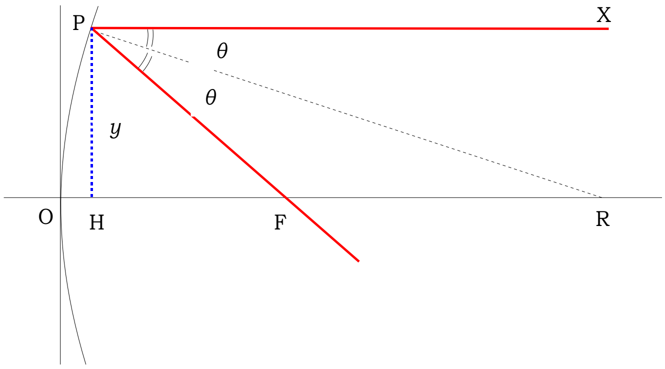
導出シリーズ　第30回　「球面鏡の焦点距離 ②」（難）

凹面鏡には「球面鏡(Spherical Mirror)」と「放物面鏡(Parabolic Mirror)」の2種類がある。「球面鏡」は作るのが容易[1]である。しかし、球面収差が生じるため球面鏡周辺部の光を焦点位置に集めることができない。そのため大口径の凹面鏡では、球面鏡では性能を上げることができない。全ての光を焦点の位置に集めるためには「放物面鏡」が必要となるのだ。

球面鏡の光の集まり方

上の図を使って、球面鏡での光の集まり方を詳しく解析してみよう。光軸に平行に入射してＰ点（x, y）で反射するとしよう。「反射の法則」から ∠XPR=∠FPR=θ が成立している。



⊿RPO において　$\sin\theta=\dfrac{y}{R}$　･･･① の関係が成立する。また、球面の曲率半径が R だから、P 点の座標は（$R(1-\cos\theta)$, y）･･･② である。

「反射の法則」より、∠XPR=∠RPF=θ だから、∠PFO=2θ である。

HF・$\tan 2\theta$ =PH だから、F の x座標（焦点距離）は $f=R(1-\cos\theta)+\dfrac{y}{\tan 2\theta}$ ･･･③ である。

［焦点距離を求める］　$\sin\theta=\dfrac{y}{R}$ 、$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}}{1-2\sin^2\theta}$ だから、③に代入して整理すると、$R(1-\cos\theta)=R\left(1-\sqrt{1-\dfrac{y^2}{R^2}}\right)$ 、$\dfrac{y}{\tan 2\theta}=\dfrac{y(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\dfrac{R^2-2y^2}{2\sqrt{R^2-y^2}}$ となるから、

光軸から y 離れた光の焦点距離は　$f=R\left(1-\sqrt{1-\dfrac{y^2}{R^2}}\right)+\dfrac{R^2-2y^2}{2\sqrt{R^2-y^2}}$ になる。$\dfrac{y}{R}$ の２次までの近似式で表すと　$f\approx\dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{y^2}{R^2}+\dfrac{R}{2}\left(1-2\dfrac{y^2}{R^2}\right)\left(1+\dfrac{y^2}{2R^2}\right)\approx\dfrac{R}{2}\cdot\dfrac{y^2}{R^2}+\dfrac{R}{2}-R\cdot\dfrac{y^2}{R^2}+\dfrac{R}{4}\cdot\dfrac{y^2}{R^2}$ になるから、焦点距離は　$f\approx\dfrac{R}{2}\left\{1-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{y}{R}\right)^2\right\}$ である。よって、光軸に近いコースを通る光の焦点距離が $f_0=\dfrac{R}{2}$ だから

$f\approx f_0\cdot\left\{1-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{y}{R}\right)^2\right\}$ 表せる。この中カッコ内の2項目が球面収差に当たる。これより、球面鏡の周辺に当たる光は焦点距離が $\dfrac{y}{R}$ の２乗に比例して短くなってゆくことが分かる。

［近似式の理論］

近似式の数学的な理論は「マクローリン展開」という理論に裏付けられている。「マクローリン展開」とは、x がゼロに近いとき

$f(x)=f(0)+\dfrac{f_{(1)}(0)}{1!}x+\dfrac{f_{(2)}(0)}{2!}x^2+\dfrac{f_{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$　（$f_{(n)}(x)$ は n 次微分係数を表す）が成立するというもの。

具体的な関数に適用してみると次のようになる。 ※ マクローリン展開により、近似式として必要な精度まで表すことができる。

$\sin\theta$　を３次までの近似式として示すと　$\sin\theta=\sin 0+\dfrac{\cos 0}{1!}\cdot\theta+\dfrac{-\sin 0}{2!}\cdot\theta^2+\dfrac{-\cos 0}{3!}\cdot\theta^3+\cdots\approx\theta-\dfrac{\theta^3}{6}$　である。

$\cos\theta$　を３次までの近似式として示すと　$\cos\theta=\cos 0+\dfrac{-\sin 0}{1!}\cdot\theta+\dfrac{-\cos 0}{2!}\cdot\theta^2+\dfrac{\sin 0}{3!}\cdot\theta^3+\cdots\approx 1-\dfrac{\theta^2}{2}$　である。

1　円形に裁断したガラス板をすり合わせて作成する。（詳しい手順は、手作り望遠鏡の製作法などを参照のこと）