

導出シリーズ 第31回 「凸レンズの公式」

凸レンズの公式とは $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ というものです。光源とレンズの距離を a 、像とレンズの位置を b 、レンズの焦点距離を f としたとき、その公式が成立するというものですね。これを導出するのが今回のテーマです。使うのは、凸レンズを光が通るときの「3つのルール」だけです。

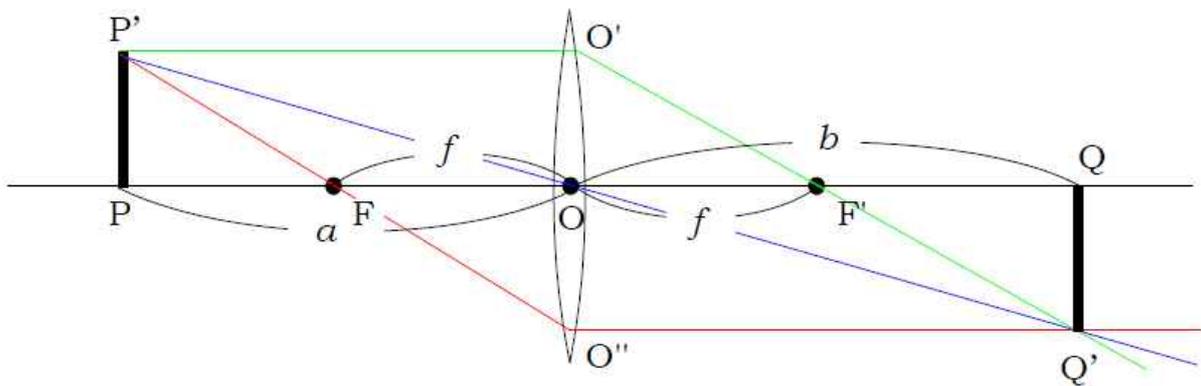
凸レンズを通る光の道筋は次の3つのコース

- ① 光軸に平行に凸レンズに入る光は反対側の焦点を通る。(緑色のコース)
- ② 凸レンズの中心 O を通る光は直進する。(青色のコース)
- ③ 手前側の焦点を通り凸レンズに入る光は光軸に平行になる。(赤色のコース)

以上のことから、凸レンズの公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ を導き出してみよう。まずは、下の図をどうぞ。

[証明] 中学の数学でならった幾何学(相似形)を使えばよいだけの簡単なものだ。

[凸レンズの公式]



$\triangle P'FP$ と $\triangle O'FO$ は対頂角が等しい直角三角形だから相似形である。相似形だから対応する辺の長さの比が等しい。よって、 $PP' : OO' = a - f : f \cdots (a)$ が成立する。

同様に、 $\triangle P'OP$ と $\triangle Q'OQ$ も対頂角が等しい直角三角形だから相似形である。相似形だから対応する辺の長さの比が等しいので $PP' : QQ' = a : b \cdots (b)$ が成立する。

また、 $OO' = QQ'$ だから $a - f : f = a : b$ の関係が成立する。よって、 $fa = (a - f)b$ より、これを展開して $fb + fa = ab$ となる。両辺を abf で割ると、レンズの公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ が得られる。

※ 右側の三角形 $\triangle Q'FQ$ と $\triangle O'F'O$ を使っても同じようにできるので、確かめてほしい。

[凹レンズの公式]

なお、凹レンズの公式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$ も、凹レンズを通る光のコース3つを使って作図し、幾何学(相似形)で導出できることも確かめてほしい。

凹レンズを通る光の道筋は次の3つのコース

- ① 光軸に平行に凹レンズに入る光は手前側の焦点から出てきたように進む。
- ② 凹レンズの中心 O を通る光は直進する。
- ③ 反対側の焦点に向かい凹レンズに入る光は光軸に平行になる。