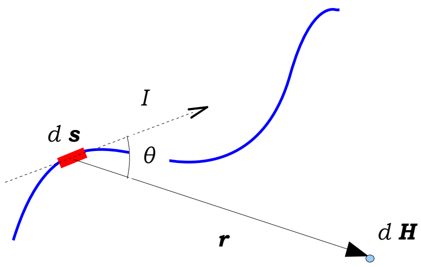
導出シリーズ　第33回　「電流が作る磁界の公式」

電流により磁界（磁場）が作られるのですが、教科書では、「直線電流」、「円電流」、「ソレノイド」の3つについての公式が示されているだけです。これらの3つの公式をひとつの法則で説明するのが、「ビオサバールの法則」というものです。大学で習うのですが、それを元に教科書の公式を導いて見ましょう。

[ビオサバールの法則]

電流 I [A] が流れている導線の微小長さを $d\boldsymbol{s}$ [m] とすると、この部分が位置 $\boldsymbol{r}$ [m] に作る磁界（磁場）は $d\boldsymbol{H}=\dfrac{I\,d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$ [A/m] である。導線全体について積分すればその位置での磁界が求められる。

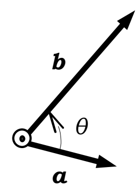


[コメント] ここで、注意が必要なことは、磁界 $\boldsymbol{H}$ 、導線の微笑長さ $\boldsymbol{s}$ 、位置 $\boldsymbol{r}$ はベクトルであるということと、ベクトル演算子「×」の意味するところだ。「×」は**「ベクトルの外積」**という演算子で、外積演算の結果はベクトル量（向きと大きさを合わせて持つ量）になる。高校で学習したベクトル演算のひとつ**「ベクトルの内積」**は演算結果がスカラー量（大きさのみを持つ量）になる。

[ベクトルの外積]

ベクトルの外積について、ベクトル $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ を使って説明しよう。

定義　2つのベクトルの外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ とは、演算結果がベクトルであり、外積ベクトルの大きさが $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\theta$ であり、外積ベクトルの向きが「ベクトル $\boldsymbol{a}$ の向きからベクトル $\boldsymbol{b}$ の向きに回転させたときに右ねじが進む向き（右図：紙面裏から表への向き）」である。



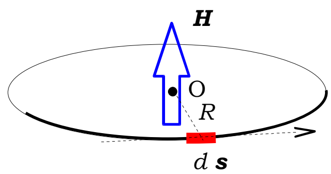
[ベクトルの内積]

ベクトルの内積について、ベクトル $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ を使って説明しよう。

定義　2つのベクトルの内積（$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$）とは、演算結果がスカラーであり、向きは無い。演算結果の大きさは $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$ である。

[円電流が中心に作る磁界]

微小導線を考えると、円の中心位置は微小導線から R の距離で、角度は常に90° になっているから $\boldsymbol{H}=\dfrac{I\cdot 2\pi R\cdot R\sin 90°}{4\pi R^3}=\dfrac{I}{2R}$ となり、円電流が中心位置に作る磁界の大きさが $H=\dfrac{I}{2R}$ で、向きが上向きとなる。



[直線流が作る磁界]

微小導線の位置を x とする。ビオサバールの法則 $d\boldsymbol{H}=\dfrac{I\,d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$ より

$$dH=\frac{I\,r\sin\theta\,dx}{4\pi r^3}$$ だから $$H=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I\sin\theta\,dx}{4\pi r^2}=\frac{I}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\frac{\sin^2\theta}{R^2}\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta$$

であるので $r=\dfrac{R}{\sin\theta}$ 、 $x=-\dfrac{R}{\tan\theta}$ 、 $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{R}{\sin^2\theta}$ を代入して整理すると

$H=\dfrac{I}{4\pi R}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$ となる。積分を実行して、直線電流が作る磁界を求めると $H=\dfrac{I}{2\pi R}$ である。