

## 導出シリーズ 第38回 「遠投の場合、水平から45度のときに最遠？」

斜方投射運動という運動がある。落下運動では「鉛直方向は等加速度運動、水平方向は等速運動となる」ことを使って計算するこの問題だが、一度は解いたはずの問題であろう。

現実の遠投では、いろいろな条件がかかわってくるので、計算どおりに行かないが、計算上では45度のときに一番良く飛ぶことを証明できる。

**理想の条件:** ① 投げる角度によらず初速度は同じであること。 ② 空気抵抗が無いこと。

上の条件が成立することは現実にはありえない。①では、人間の体の構造から、水平方向には投げやすいが、鉛直真上には投げにくいのは誰でもわかる。②については、地球上にいる限り、空気抵抗からは逃れられないのは当たり前だ。そのため、ボールの減速、ボールのスピン効果による軌道の曲がりなどが起こり、単純な等加速度運動ではなくなる。そこで、すべてを無視して上の理想の条件を満たすとしよう。

**【斜方投射運動】** 等加速度運動の公式は3つからなる。距離の公式  $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ 、速度の公式  $v = v_0 + a t$ 、おまけの公式  $v^2 - v_0^2 = 2 a x$  である。これを使って計算してみよう。

**【斜方投射運動】** 水平から  $\theta$  [rad] の角度で初速度  $v_0$  [m/s] で小球を投げる。このとき、加速度(重力加速度)  $g$  [m/s<sup>2</sup>] であり、空気抵抗が無視できるとするとしよう。鉛直方向は等加速度運動だから、 $t$  [s] 後の小球の位置は、鉛直方向が  $y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$  …①、水平方向が  $x = v_0 \cos \theta \cdot t$  …② である。小球を地面の高さから投じてから、小球が地面に落下する時刻を計算しよう。 $y = 0$  を①に代入して  $0 = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$  だから、 $t = 0, \frac{2 v_0 \sin \theta}{g}$  だから、小球が落下するのは  $t = \frac{2 v_0 \sin \theta}{g}$  [s] である。これを②に代入して  $x = \frac{2 v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$  だから、落下地点は  $x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$  前方となる。 $\sin 2\theta$  の最大値は  $\theta = 45^\circ$  のとき、1 だから、最遠投の距離は  $45^\circ$  のとき  $\frac{v_0^2}{g}$  [m] である。 **※ なお、地球が丸いことは無視した計算である。**

**【表計算ソフト MS Excel で計算させてみよう】**

$t$  [s] 後の小球の位置は、下の式になります。

鉛直方向が  $y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$  …①、水平方向が  $x = v_0 \cos \theta \cdot t$  …②

表計算ソフト Excel の表に上の式を組み込んで、使いやすいように作成してみました。

→ 「導出シリーズ」のメニューに、この Excel シートの「ダウンロードボタン」をつけています。

数式埋め込みだけで、マクロは使っていません。安心してダウンロードして使ってみてください(マクロ起動しないのモードにしてください)。

**【利用方法】**

斜方投射運動計算表のシートにある「初速度」、「仰角」、「重力加速度」には自由な数値を入れることができます。その他のシートの部分は保護をかけていますので入力できなくしています。(シートの数式を壊さないためです)