

導出シリーズ 第39回 「はねかえり係数の測定法」

はねかえり係数の定義では、「動かない壁に衝突したときの衝突前後での速さの比」と定義されている。しかし、「速さを正確に測定するのは難しい」したがって、一般には定義に基づく方法ではねかえり係数を測定することは少ないので。では、どのような方法があるのか、具体的な測定方法を示してみよう。

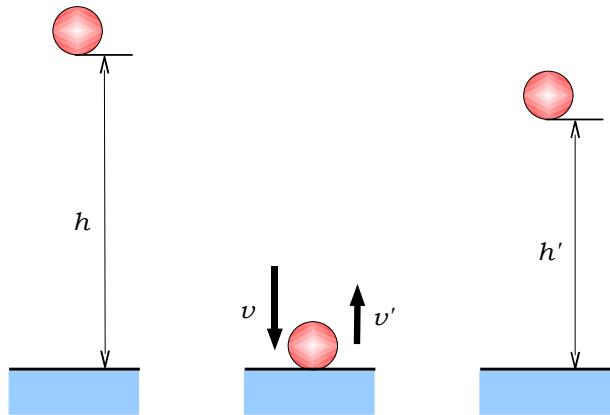
十分に重い動かない板を床に置き、高さ h から物体を静かに落下させる。落下した物体は板と衝突し、物体がはねかえる。このときの物体がはねかえった最高点の高さ h' を測定する。以上の二つの高さより、はねかえり係数が測定できるのだ。

そのときに使われる公式は $e = \sqrt{\frac{h'}{h}}$ である。野球での公認ボールの検査もこの方法を使っており、ボールのはねかえる高さを測定して公認ボールの基準としている。

[導出過程]

高さ h から物体を静かに落下させるので、物体の運動は「自由落下運動」になる。板に衝突する直前の物体の速度を v とする。等加速度運動の公式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ を使って計算すると、 $v^2 - 0^2 = 2gh$ より $v^2 = 2gh \cdots ①$ が成立する。これより、板に衝突する直前の速度は $v = \sqrt{2gh}$ (鉛直下向き) である。

板に物体が衝突するときのはねかえり係数を e (未知数) とする。はねかえり係数の定義は $e = -\frac{v'}{v} \cdots ②$ である。よって、板と衝突した後の物体の速度は $v' = -ev$ (鉛直上向きに ev) になる。



この後、物体は初速度 $v' = -ev$ の「鉛直投げ上げ運動」になる。最高点に達するとき物体の速度は 0 である(常識!)。よって、等加速度運動の公式 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ に代入すると、 $0^2 - (-ev)^2 = 2 \cdot (-g) \cdot h'$ の式が成立する。これを整理して $e^2 v^2 = 2gh' \cdots ③$ である。 $③ \div ①$ より $e^2 = \frac{h'}{h}$ である。よって $e = \sqrt{\frac{h'}{h}}$ が成立するから、はねかえり係数は $e = \sqrt{\frac{h'}{h}}$ と表すことができる。

※ 高校野球で使われる「公認ボール」の基準を調べてみよう。

[バウンドを無限回繰り返して止まるまで…]

手を離してから物体は板と繰り返し衝突をして、板の上に静止する。無限回の衝突を繰り返すのだから無限時間かかる(永遠にバウンドを繰り返す)のだろうか? 当然、一定の時間のバウンドの後静止するはずだ。物体が止まるまでの時間を計算してみよう。

※ 等加速度運動の公式を使った計算問題だから簡単だ!

手を離してから最初に板に衝突するまでの時間 t_0 とする。等加速度運動の公式 $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ に代入して、 $h = \frac{1}{2} g t_0^2$ より $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ である。 n 回目の衝突後から $n+1$ 回目の衝突までの時間を t_n とする。等加速度運動の公式に代入して $0 = v_n t_n - \frac{1}{2} g t_n^2$ だから $t_n = \frac{2v_n}{g}$ である。 $v_n = e^n \sqrt{2gh}$ だから $t_n = \frac{2e^n \sqrt{2gh}}{g}$ である。よって、物体が静止するまでの時間は $T = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n$ より $T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{2e}{1-e} \right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)$ である。