

導出シリーズ 第41回 「弾性衝突ではエネルギーが保存する！」②

物体が衝突するとき、「弾性衝突」、「非弾性衝突」に分かれる。「弾性衝突」は、はねかえり係数 e が $e=1$ になる衝突をいい、それ以外 ($e<1$) は「非弾性衝突」という。なお、 $e=0$ の場合に限り「完全非弾性衝突」と呼ぶのだ。

受験勉強を進めてゆく過程で、解法のテクニックとして「弾性衝突のとき、力学的エネルギーが保存する」というまい技がある。勉強が進めば常識のような知識であるが、これを証明してみよう。

[導出過程]

二次元衝突のケース

小球A(質量 m)が $\vec{v}$ の速度で進んでいる。前方にある静止している小球B(質量 M)に衝突する場合を考える。衝突後のそれぞれの速度を、Aが $\vec{v}'$ 、Bが $\vec{V}'$ とする。

二次元衝突の場合、はねかえり係数の定義をしなければならない。衝突したときに互いに押し合う方向と、それに垂直な方向について考えれば良い。互いに押し合う方向に垂直(y 軸)には力積がゼロだから運動量は変化しない(その方向の速度の変化は無い)。よって、速度が変化するのは力積の向き成分だけだ。

小球Bは静止していたから、その力積の方向(x 軸)に動く。上の図の θ の向きとしよう。また、小球Aは元の向きから上の図の α の向きに進むとする。

力積の向き(x 軸)とそれに垂直な向き(y 軸)に、衝突前後の速度を分解する。

小球Aの衝突前の速度 $\vec{v}$ は $v_x=v\cos\theta$ 、 $v_y=v\sin\theta$ であり、小球Aの衝突後は $v_x'=v'\cos(\theta+\alpha)$ 、 $v_y'=v'\sin(\theta+\alpha)$ である。

運動量保存の法則より、 x 軸方向成分について $mv\cos\theta=mv'\cos(\theta+\alpha)+MV'$ ・・・①、 y 軸方向成分については $mv\sin\theta=mv'\sin(\theta+\alpha)$ ・・・②が成立する。

また、力積の方向(x 軸)は、はねかえり係数の定義より $1=-\frac{v'\cos(\theta+\alpha)-V'}{v\cos\theta-0}$ だから

$v\cos\theta=V'-v'\cos(\theta+\alpha)$ ・・・③が成立する。

①の2乗と②の2乗の和より $m^2v^2=m^2v'^2+M^2V'^2+2mMv'V'\cos(\theta+\alpha)$ ・・・④が成立し、同様に、②、③より、 $m^2v^2=m^2V'^2+m^2v'^2-2m^2v'V'\cos(\theta+\alpha)$ ・・・⑤が成立する。

③、④より、 $m^3v^2+m^2Mv^2=m^3v'^2+mM^2V'^2+m^2MV'^2+m^2Mv'^2$ が成立する。ここで同類項を集めると $m^2(m+M)v^2=m^2(m+M)v'^2+mM(m+M)V'^2$ となる。

両辺を $2m(m+M)$ で割ると $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}MV'^2$ が成立するので、衝突前後の運動エネルギーの和が等しいこと(力学的エネルギー保存則が成立すること)が導けた。

