

導出シリーズ 第45回 「屈折の法則」～フェルマーの原理～

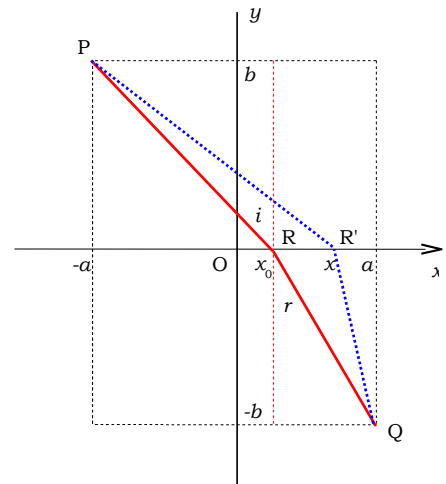
屈折の法則をフェルマーの原理を使って導出する！

[フェルマーの原理] 波は最短時間のコースを通る！

$y > 0$ での速度 v_1 、 $y < 0$ での速度 v_2 とする。PR の距離は $\sqrt{(a+x)^2+b^2}$ 、RQ の距離は $\sqrt{(a-x)^2+b^2}$ より、

$$T = \frac{\sqrt{(a+x)^2+b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}{v_2} \quad \text{で光が P から Q に達す}$$

る。R 点の位置を変化させたとき、最小時間になる経路を求めればよい。



[微分係数から最小値を取るときを求める！]

x で微分すると $\frac{dT}{dx} = \frac{(a+x)v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2} - (a-x)v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}}{v_1v_2\sqrt{(a+x)^2+b^2}\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$ より、微分係数ゼロに

なる $(a+x_0)v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2} - (a-x_0)v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2} = 0$ のとき極値(最小かも?)をとる。

$$\sin i = \frac{(a+x_0)}{\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}}, \quad \sin r = \frac{(a-x_0)}{\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}} \quad \text{より} \quad v_2 \sin i - v_1 \sin r = 0 \quad \text{だから、} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

が成立している。よって、経過時間が極値となるときは、スネルの法則(屈折の法則) $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$

を満たすときだ。※ このとき、この極値が最小値であることを示せば証明は終わる(次は増減表！)。

[所要時間が最小値となることを確かめる！]

$X > 0$ の領域で $F(X) = \frac{X}{C\sqrt{X^2+B^2}}$ ($C > 0$) の関数を考える。 $F(X) = \frac{1}{C\sqrt{1+\left(\frac{B}{X}\right)^2}}$ と書

けるので、 X 増加で分母が減少するから、 $F(X) = \frac{X}{C\sqrt{X^2+B^2}}$ は単調増加関数である。

$$x < x_0 \quad \text{の時} \quad \frac{a+x}{v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}} < \frac{a+x_0}{v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}}, \quad \frac{-a+x}{v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}} < \frac{-a+x_0}{v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}}$$

$$\text{より、} T' = \frac{2a+2x}{2v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}} + \frac{-2a+2x}{2v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}} < \frac{a+x_0}{v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}} + \frac{-a+x_0}{v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}} = 0$$

である。よって、 $x < x_0$ のとき、経過時間の関数は減少関数である。

$$x \geq x_0 \quad \text{の時} \quad \frac{a+x}{v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}} \geq \frac{a+x_0}{v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}}, \quad \frac{-a+x}{v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}} \geq \frac{-a+x_0}{v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}}$$

$$\text{より、} T' = \frac{2a+2x}{2v_1\sqrt{(a+x)^2+b^2}} + \frac{-2a+2x}{2v_2\sqrt{(a-x)^2+b^2}} \geq \frac{a+x_0}{v_1\sqrt{(a+x_0)^2+b^2}} + \frac{-a+x_0}{v_2\sqrt{(a-x_0)^2+b^2}} = 0$$

だから、 $x \geq x_0$ のとき増加関数である。

よって、 $x = x_0$ のとき、経過時間の関数は最小値をとることがわかる。