導出シリーズ　第46回　「消費電力の公式①」～ 抵抗の場合 ～

[直流の場合]

中学校で学習した消費電力の定義によると、 $P=V\times I$ （消費電力=電圧×電流）であった。
電圧 V [V] の電池に抵抗 R [Ω] を接続したとき、オームの法則より、抵抗に流れる電流が
$I=\dfrac{V}{R}$ となる。消費電力の定義より $P=V\times I=V\times\dfrac{V}{R}$ だから、抵抗での消費電力は
$P=\dfrac{V^2}{R}$ である。直流の場合は、このように計算すればよいだけだ（中学校レベル！）。

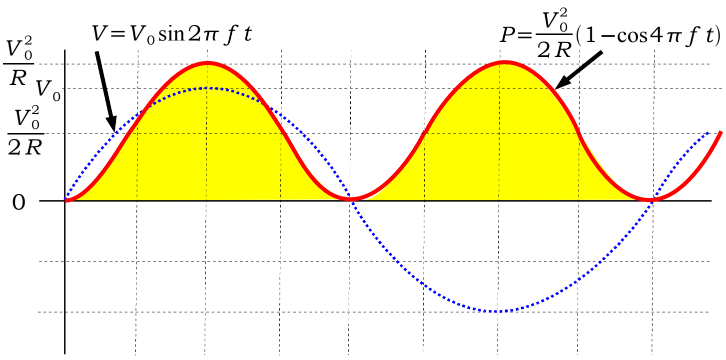
[交流の場合]

高校で学習する電気分野では交流回路が含まれる。この場合の消費電力の計算も必要となる。一般に使用されている交流は**「正弦波交流」**と呼ばれる交流である。電圧の変化が正弦関数（サイン関数）になるもので、数式で表すと、t [s] のときの電圧 V [V] が $V=V_0\sin 2\pi f t$ （ V_0 は電圧の最大値、 f は周波数[1]）で表すことができる交流である。

[抵抗の消費電力]　**交流の場合、消費電力が時間とともに変動する！**

交流電圧が $V=V_0\sin 2\pi f t$ （ V_0 は電圧の最大値、 f は周波数）を抵抗 R [Ω] に加えたとき、抵抗に流れる電流は $I=\dfrac{V_0}{R}\sin 2\pi f t$ である。消費電力の定義 $P=V\times I$ を使って、抵抗での消費電力を求めると $P=\dfrac{V_0^2}{R}\sin^2 2\pi f t$ である。消費電力が時間によって変動している（ 0 から $\dfrac{V_0^2}{R}$ の間で変化）。特に、**時間が $t=\dfrac{n}{2f}$ （n は整数）のとき、消費電力がゼロ！**

変動している消費電力を平均するとどのようになるのか？　**→ グラフに描けば平均は簡単だ。**



消費電力は $P=\dfrac{V_0^2}{R}\sin^2 2\pi f t$ だから、これをグラフに描けばよい。

三角関数の公式[2] $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

より $P=\dfrac{V_0^2}{2R}(1-\cos 4\pi f t)$ が消費電力になる（グラフは右図の赤線）。

よって、最大消費電力は $\dfrac{V_0^2}{R}$ であり、平均消費電力はグラフから $\dfrac{V_0^2}{2R}$ である。

[微積分法を使う方法]

消費電力 $\bar{P}=\dfrac{V_0^2}{R}\sin^2 2\pi f t$ を1周期に渡って積分すると電力量になる。その時間（1周期）で割ると平均消費電力である。よって、平均消費電力は $\bar{P}=\dfrac{1}{T}\int_0^T\dfrac{V_0^2}{R}\sin^2 2\pi f t\,dt$ （ $T=\dfrac{1}{f}$ とする）より、 $\bar{P}=\int_0^T\dfrac{V_0^2}{2R}(1-\cos 4\pi f t)\,dt$ だから、積分すると $\bar{P}=\dfrac{V_0^2}{2R}-\dfrac{V_0^2}{2RT}\int_0^T\cos\dfrac{4\pi t}{T}\,dt=\dfrac{V_0^2}{2R}$ だから、平均消費電力は $\dfrac{V_0^2}{2R}$ であることがわかる。

1　振動数と同義である。単位時間当たりの変化の繰り返し回数。一般には「振動数」を使い、交流分野では「周波数」をよく使用するようです。

2　半角公式と呼ばれるもの。三角関数の加法定理 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ に $A=B=\theta$ より導くことができる。