導出シリーズ　第48回　「LCR回路のインピーダンス」

[交流回路とコイル、コンデンサー、抵抗]

導出シリーズ第34、35回でリアクタンスについて解説済みだ。今回は交流回路の一般的なものとして、L(コイル)、C(コンデンサー)、R(抵抗)の回路を扱ってみる。

最初はLCR直列回路である。直列回路に流れる電流を $I = I_0 \sin\omega t$ とする(直列接続だから、電流が共通！)。

抵抗の電圧は電流の位相ずれがないので $V_R = I_0 R \sin\omega t$ である。

コンデンサーの電圧は、電流に対して位相が $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れるので $V_C = \dfrac{I_0}{\omega C}\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ だ。

コイルの電圧は、電流に対して位相が $\dfrac{\pi}{2}$ 進むので $V_L = \omega L I_0 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。

以上より、全電圧は $V = V_R + V_C + V_L$ だから、 $V = I_0 R \sin\omega t + I_0\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)\cos\omega t$ である。一つにまとめると $V = I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t + \delta)$ である。式中の δ は位相のずれで $\tan\delta = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$ を満たす定数である。

電圧を基準となるように戻す。 $V_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ が成立するから、LCR直列回路のインピーダンス(交流に対する抵抗の働き)は $Z = \dfrac{V_0}{I_0}$ だから $Z = \dfrac{V_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ である。電流に対する電圧の位相のずれは、 $\tan\delta = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$ を満たす δ だけ位相が進むのだから、電圧に対する電流の位相のずれは $\tan\delta = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$ を満たす δ だけ位相が遅れることになる。

[まとめ]

	抵抗(単独)	コンデンサー(単独)	コイル(単独)	LCR(直列)
リアクタンス(インピーダンス)	$Z_R = R$	$Z_C = \dfrac{1}{\omega C}$	$Z_L = \omega L$	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$
位相のずれ	0	$\dfrac{\pi}{2}$ 進む	$\dfrac{\pi}{2}$ 遅れる	$\tan\delta = \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)/R$ を満たす δ だけ遅れる