導出シリーズ　第49回　「宇宙速度」

[万有引力の法則]

ニュートンが発見した万有引力の法則は、「質量が m_1 、m_2 が距離 r 離れているとき、互いに $f=G\cdot\frac{m_1 m_2}{r^2}$ （ただし、G は万有引力定数で 6.673×10^{-11} [Nm²/kg²]）の引力が働く」というものです。人工衛星もこの法則に従って運動しているのだ。

[万有引力による位置エネルギー]

無限遠方を位置エネルギーゼロとして[1]、万有引力による位置エネルギーを求めてみよう。

最初、質量が m_1 [kg]、m_2 [kg] がはるかかなたに互いに離れている（無限遠方）とする。その位置から力を加えてゆっくりと近づけ、互いの距離が r [m] になるまでにした仕事が、「位置エネルギー」である。ある距離 x [m] のときの万有引力は $f(x)=G\cdot\frac{m_1 m_2}{x^2}$ である。

その位置からわずかな距離 Δx [m] 移動させるときのわずかな仕事 $\Delta W=f\cdot\Delta x$ を計算してみよう。わずかな仕事は $\Delta W=G\cdot\frac{m_1 m_2}{x^2}\cdot\Delta x$ と表すことができる。

わずかな距離を極限まで小さくすると $\frac{dW}{dx}=G\cdot\frac{m_1 m_2}{x^2}$ となる「微分方程式」が成立する。

「変数分離法[2]」を使えば $W=\int_\infty^r G\cdot\frac{m_1 m_2}{x^2}dx=\left[-G\frac{m_1 m_2}{x}\right]_\infty^r=-G\cdot\frac{m_1 m_2}{r}$ となる。無限遠方での位置エネルギーがゼロだから、万有引力による位置エネルギーは常に負の値をとる。

[宇宙速度とは？]

宇宙速度には、第一宇宙速度、第二宇宙速度、第三宇宙速度とに分かれる。「第一宇宙速度」は人工衛星になるための最小の初速度である。また、「第二宇宙速度」は、人工衛星が地球引力圏から脱出し無限遠方に飛び去るための最小の初速度である。「第三宇宙速度」は、人工衛星が太陽引力圏から脱出し無限遠方に飛び去るための最小の初速度である。

[第一宇宙速度]

地球（質量 M 、半径 R）の地上すれすれに飛ぶ人工衛星の速度に相当。人工衛星の質量を m とすると、重力が向心力となるので $\frac{m v_1^2}{R}=mg$ が成立する。よって、$v_1=\sqrt{gR}$ だから、数値[3]を代入してやると、第一宇宙速度は 7.91 [km/s] であることがわかる。

[第二宇宙速度]

同様の条件として、エネルギー保存の法則を適用すればよい。$-G\cdot\frac{Mm}{R}+\frac{1}{2}m v_2^2=0$ が成立するから、$v_2=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ である。ここで、地上での重力から $mg=G\frac{Mm}{R^2}$ が成立するので、$v_2=\sqrt{2gR}$ である。よって、第二宇宙速度は 11.2 [km/s] であることがわかる。

1　位置エネルギーは位置エネルギーがゼロの地点を定める必要がある。万有引力による位置エネルギーでは無限遠方に離れたときとする。

2　微分方程式の解法の一つである。詳細については、「物理の小道」の「番外編」の微分方程式入門を参照のこと。

3　地球の半径 $R=6.38\times10^6$ [m] 、重力加速度 9.8 [m/s²] である。これより、地上では 9.91km/s 以上では走れないことになる！