導出シリーズ　第50回　「ケプラーの第三法則」

[万有引力の法則]

ニュートンが発見した万有引力の法則は、「質量が m_1 、 m_2 が距離 r 離れているとき、互いに $f=G\cdot\frac{m_1m_2}{r^2}$ （ただし、 G は万有引力定数で 6.673×10^{-11} [Nm²/kg²]）の引力が働く」というものです。人工衛星も、惑星も、この法則に従って運動しているのだ。

[ケプラーの第三法則]

ケプラーは、チコ・ブラーエの観測データからケプラーの法則を見つけ出したものである。

① すべての惑星は、太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を通る。

② 太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に描く面積は等しくなる。

③ 惑星の公転周期の2乗と半長軸の3乗の比は、すべての惑星で等しい。

以上の3つの法則だが、①は「楕円軌道の法則」、②は「面積速度一定の法則」、③は「調和の法則」と名付けられている。

「万有引力の法則」から導出する！

楕円軌道の場合、計算が複雑になるので、惑星が円軌道上を公転しているとして計算しよう。

太陽の質量を M [kg]、惑星の質量を m [kg]、公転半径を r [m]、公転周期を T [s] とする。なお、太陽の質量が圧倒的に大きいので太陽が中心に静止しているしてよい[1]。

惑星の運動は、太陽を中心とする円運動になるので、惑星が受ける万有引力 $f=G\cdot\frac{M\,m}{r^2}$ が働いている。また、円運動では向心加速度（中心向きの加速度）が $a=\frac{v^2}{r}$ （v は公転速度）、または、 $a=r\,\omega^2$ （ω は公転運動の角速度）である。

運動の法則 $f=m\,a$ に代入して、惑星の運動方程式を作ると $G\cdot\frac{M\,m}{r^2}=m\cdot r\,\omega^2$ となる。

角速度 ω を周期 T で表すと $\omega=\frac{2\pi}{T}$ になるから、上の関係式は $G\cdot\frac{M\,m}{r^2}=\frac{4\pi^2 m\,r}{T^2}$ になり、これを整理すると $\frac{r^3}{T^2}=\frac{G\,M}{4\pi^2}$ である。

よって、公転半径の3乗と周期の2乗の比が一定となることがわかる（右辺はすべて定数）。よって、ケプラーの第三法則が導出されたことになる。

[別解] 公転速度を v [m/s] のとき、向心加速度は $a=\frac{v^2}{r}$ である。よって、惑星の運動方程式は $G\cdot\frac{M\,m}{r^2}=m\cdot\frac{v^2}{r}$ になる。公転速度 v を周期で表すと $v=\frac{2\pi\,r}{T}$ になる。よって $G\cdot\frac{M\,m}{r^2}=\frac{4\pi^2 m\,r}{T^2}$ になり、これを整理すると $\frac{r^3}{T^2}=\frac{G\,M}{4\pi^2}$ である。よって、公転半径の3乗と周期の2乗の比が一定となることがわかる（右辺はすべて定数）。これで、ケプラーの第三法則が導出されたことになる。 ※ どちらにしても同じ結果が得られる（当然！）。

運動方程式を作るのと同様だが、「万有引力が向心力になって円運動する」として $G\cdot\frac{M\,m}{r^2}=\frac{m\,v^2}{r}$ としても結果は同じだ！

※ 物理学史からすると、「ケプラーの法則」から「万有引力の法則」が発見されたのだから、論理が逆になのだが…。

1　太陽に対する惑星の質量比がゼロに近くない場合は、太陽も惑星の動きにあわせて動くことになる。この場合、太陽、惑星の運動の中心は太陽と惑星を結ぶ線分を質量の逆比で内分する点（太陽と惑星の重心位置）になる。