導出シリーズ　第52回　「単ふりこの周期」

[ふりこの振幅が小さいとき、ふりこは単振動！]

単振動という運動は、**「基準点（中心）からのずれに比例した復元力が働いているときの運動」**であるという共通点を持っている。ばねにつながれた物体の運動である。ばねの力はフックの法則「ばねの伸び（縮み）の量に比例した力が生じる」のため、前述にあげた単振動の条件を満たしている。そのため、ばねにつながれたおもりの運動は単振動の代表として説明によく使われている。

ばね定数 k [N/m] のばねに質量 m [kg] の物体を取り付けた。物体を引いて、ばねを D [m] 伸ばし静かに離した。ばねが x [m] 伸びているときの物体の運動方程式を作ると $ma=-kx$ より $a=-\frac{k}{m}\cdot x$ である。

単振動の公式 $x=A\sin(\omega t+\delta)$ 、 $v=A\omega\cos(\omega t+\delta)$ 、 $a=-A\omega^2\sin(\omega t+\delta)$ より $a=-\omega^2\cdot x$ ･･･① が成立するので、角振動数は $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ である。よって、このときの単振動は、 $x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\delta\right)$ 、 $v=A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\delta\right)$ になる。

つぎに、振幅 A と初期位相 δ を決めればよい。手を離したとき（時刻ゼロ）、位置は $x=A$ 、速度は $v=0$ だった（初期条件）から、 $D=A\sin\delta$ 、 $0=A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\delta$ だから、 $\delta=\frac{\pi}{2}$ 、 $A=D$ である。よって、この運動は、位置が $x=D\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$ 、速度が $v=-D\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$ 周期は $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。

[ふりこの単振動]

長さ L [m] の軽い糸に質量 m [kg] の小球を取り付けたふりこを小さな振幅で振動させる。このときの運動の運動方程式を作る。鉛直線からのふりこの傾きを θ とする。このとき、物体に働く力は重力と糸の張力であり、物体が受ける復元力は $f=mg\sin\theta$ である。ふりこの変位（最下点からの位置）を x とすると、ふりこの振幅が小さい（ふりこの傾き θ が小さい）[1] ので $L\theta=x$ と表すことができる。また、**三角関数の近似式「 $\theta\approx 0$ のとき $\sin\theta\approx\theta$ 」**が成立するので、運動方程式は $ma=-\frac{mg}{L}\cdot x$ となる。よって、 $a=-\frac{g}{L}\cdot x$ だから、単振動の公式 ① より、角振動数は $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$ である。よって、周期の公式 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ に代入して計算すると、ふりこの単振動の周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ と表すことができる。これより、ふりこの周期はおもりの質量には関係なく、ふりこの長さ L と重力加速度 g によって決まることがわかる。

具体的な数値を入れて計算すると、ふりこの長さが 25cm のときの周期が約 1 秒、100cm のときの周期が約 2 秒になることがわかる。

1　ふりこの振れ幅が大きいと以下の近似式が成立しないため、ふりこは単振動にはならない。