導出シリーズ　第53回　「単振動の公式」

単振動運動は、等速円運動を横から見た運動（xy 平面での円運動を x 方向や y 方向から見た運動）とされている。ベクトルの x 成分や、y 成分を抜き出したものと同義である。なお、このとき中心（基準点）からの変位に比例する復元力が働いている運動になることも導出できる。

［等速円運動］　**位置 ⇔ 速度 ⇔ 加速度　（時間で微分すると →、時間で積分すると ← の向きに移る！）**

まず、等速円運動を考える。等速円運動の中心を原点、半径をA、角速度を　ω　とするとき、

位置ベクトルは　$\vec{x}=\left(A\cos\omega t, A\sin\omega t\right)$　である。

速度ベクトルは　$\vec{v}=\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\left(-A\omega\sin\omega t, A\omega\cos\omega t\right)$　となる。位置ベクトルと速度ベクトルの内積をとると　$\vec{x}\cdot\vec{v}=\left(A\cos\omega t, A\sin\omega t\right)\cdot\left(-A\omega\sin\omega t, A\omega\cos\omega t\right)=0$　だから、位置ベクトルと速度ベクトルは互いに垂直の関係になる。よって、速度ベクトルは円の接線方向になっている。

加速度ベクトルは　$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\left(-A\omega^2\cos\omega t, -A\omega^2\sin\omega t\right)$　であるので、加速度と位置の間には　$\vec{a}=\dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2}=-\omega^2\cdot\vec{x}$　という関係式も成立する。これより、加速度ベクトルは位置ベクトルと逆向きになるので、加速度ベクトルは中心向きである（向心加速度）。

［単振動］

単振動は等速円運動を一方向から見た運動だから、y 軸方向からみた場合（ベクトルの x 成分を取り出したものに相当する）について考えよう。

位置は　$x=A\cos\omega t=A\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)$　と書ける。これは、　$x=A\sin(\omega t+\delta)$　（ただし $\delta=\dfrac{\pi}{2}$ ）と書き、A を単振動の振幅、　ω　を単振動の角振動数、　δ　を単振動の初期位相という。

速度は　$v=-A\omega\sin\omega t=A\omega\cos(\omega t+\delta)$　（ただし $\delta=\dfrac{\pi}{2}$ ）である。

加速度は　$a=-A\omega^2\cos\omega t=-A\omega^2\sin(\omega t+\delta)$　（ただし $\delta=\dfrac{\pi}{2}$ ）である。

以上より、加速度と位置の間には　$a=-\omega^2\cdot x$　が成立する。これは単振動の条件「復元の加速度は変位に比例する」を表すものとしてよく遣われる。質量を乗じた　$f=ma=-m\omega^2\cdot x$　も、「復元力が変位に比例している」を表すものとして、よく遣われる公式である。

［まとめ］

単振動の振幅をA、角振動数を　ω　、初期位相を　δ　とするとき

「位置の公式」　：　$\boldsymbol{x=A\sin(\omega t+\delta)}$

「速度の公式」　：　$\boldsymbol{v=A\omega\cos(\omega t+\delta)}$

「加速度の公式」　：　$\boldsymbol{a=A\omega^2\sin(\omega t+\delta)}$

「単振動の条件式」　：　$\boldsymbol{a=-\omega^2 x}$　**または**　$\boldsymbol{f=-m\omega^2 x}$