

導出シリーズ 第57回 「平行板コンデンサーの極板間の力」

平行板コンデンサーの極板は互いに引き合うことはわかる。このときの力はどのようなものになるのだろうか？ 考えてみよう。点電荷が引き合う力の公式は「クーロンの法則」 $f = k_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ (k_0 は 9.0×10^9 [Nm²/C²]) である。しかし、コンデンサーの極板に蓄えられている電荷は点電荷ではないので、この公式は使えない。では、どうすればよいのだろうか？

コンデンサーの公式

極板の面積 S [m²]、極板間隔 d [m] の平行板コンデンサーの電気容量の公式 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ (ϵ_0 は真空の誘電率)、コンデンサーの公式 $Q = CV$ 、コンデンサーのエネルギーの公式 $Q = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ だから、これらを使って導出することを考えてみよう。

極板間に働く力を導出する

極板の面積 S [m²]、極板間隔 d [m] の平行板コンデンサーの電気容量は $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ [F] であり、電圧 V [V] をかけたときコンデンサーの極板に蓄えられる電気量は $Q = CV = \left(\frac{\epsilon_0 S}{d}\right)V$ [C] となる。また、蓄えられていた静電エネルギーは $U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}$ …① である。

充電後、電池を切り離し、極板をわずかな距離 Δd [m] 引き離すとしよう。このとき、極板を引く力を f [N] とすると、極板に加えた仕事は $W = f \cdot \Delta d$ [J] である。

このとき、コンデンサーは電池と切り離されているためコンデンサーの極板に蓄えられている電気量は $Q = \left(\frac{\epsilon_0 S}{d}\right)V$ [C] のまま変化せず、コンデンサーの電気容量は $C' = \frac{\epsilon_0 S}{d + \Delta d}$ になる。よって、コンデンサーのエネルギーは $U' = \frac{1}{2} C' V^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C'} = \frac{Q^2 (d + \Delta d)}{2\epsilon_0 S}$ …② となる。

コンデンサーの静電エネルギーの変化 $U' - U$ は、極板を引く外力がする仕事 $W = f \Delta d$ によってもたらされたものである。

よって、 $U' - U = f \cdot \Delta d$ …③ の関係が成立する。①、②を関係式③の左辺に代入して

$$U' - U = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \cdot \Delta d \text{ となるから、 } f = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \text{ となる。 } Q = \left(\frac{\epsilon_0 S}{d}\right)V \text{ を代入して整理すると、}$$

極板が引き合う力は $f = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2d^2}$ となる。

極板の面積 S [m²]、極板間隔 d [m] の平行板コンデンサーに電圧 V [V] をかけたとき、極板どうしが引き合う力は $f = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2d^2}$ [N] と表すことが出来る。

※ 極板間の電界 $E = \frac{V}{d}$ 、極板にたくわえられた電気量 $Q = \left(\frac{\epsilon_0 S}{d}\right)V$ だから、極板同士が引く力は $f = \frac{1}{2} QE$ となっている。なぜ $\frac{1}{2}$ が付いているのだろうか？ その理由を考えてみよう。