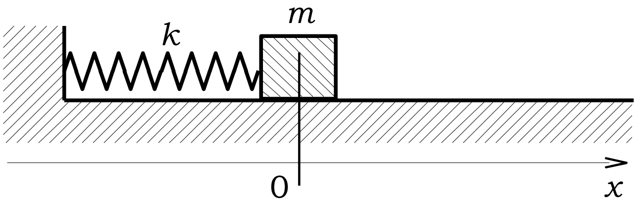
導出シリーズ　第60回　　水平なばねの単振動を考える



水平で滑らかな床の上に置かれた小物体がある。この小物体の質量は m [kg] であり、ばね定数 k [N/m] の軽いばねにより壁に連結されている。小物体に力を加えてばねの自然長の位置よりばねを A [m] 引き伸ばし、静かに手を離すと、小物体は振動運動を始めた。この運動について解析してみよう。

小物体の位置 x における運動方程式を作ると $ma=-kx$ であるから、小物体の加速度は $a=-\frac{k}{m}\cdot x$ である。この運動において、**「加速度 a と変位 x の向きが反対向きであり、それらの大きさは比例している」**ことが重要である。このような運動はどんな運動になるのだろうか？

円運動を一方向から見た運動　→「単振動」

円運動の半径を R [m]、角速度を ω [rad/s]、初期位相を δ [rad] とすると、

位置： $(x,\ y)=(R\cos(\omega t+\delta),\ R\sin(\omega t+\delta))$

速度： $(v_x,\ v_y)=(-R\omega\sin(\omega t+\delta),\ R\omega\cos(\omega t+\delta))$

加速度： $(a_x,\ a_y)=(-R\omega^2\cos(\omega t+\delta),\ -R\omega^2\sin(\omega t+\delta))=(-\omega^2\cdot x,\ -\omega^2\cdot y)$

であることは、円運動の学習時に説明している。

加速度の成分 $a_x=-\omega^2\cdot x$（または、$a_y=-\omega^2\cdot y$）で分かるように、**「加速度 a と変位 x の向きが反対向きであり、それらの大きさは比例している」**とまったく同じ関係が成立しているではないか！

ばねに連結された小物体の運動はまさしく「円運動を一方向からみた運動（単振動）」であることが判明した。

ばねに連結された小物体の運動は単振動！

ばねに連結された小物体の運動方程式から得られた $a=-\frac{k}{m}\cdot x$ を円運動を一方向から見た運動の加速度 $a_x=-\omega^2\cdot x$ と対比させると、円運動の角速度 ω に相当する物理量を「角振動数」と呼ぶ。よって、この運動での角振動数は $\sqrt{\frac{k}{m}}$ [rad/s] となる。

よって、 $x=R\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\delta\right)$ ・・・①、 $v=-R\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\delta\right)$ ・・・② と表現できる。ここで、現在のところ R と δ が未確定である。では、この未確定の値を決めるのは何だろうか？

初期条件を考えよ！

手を離したときが、最初の状態で、これを「初期条件」という。このときの時刻が $t=0$ 、位置が $x=A$ 、速度が $v=0$ だったから、①、②に代入して $A=R\cos\delta$ 、 $0=-R\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sin\delta$ となり $R=A$ 、 $\delta=0$ であればよい。よって、時刻 t での小物体の位置は $x=A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$ 、速度は $v=-A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$ である。また、この単振動の周期は $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。