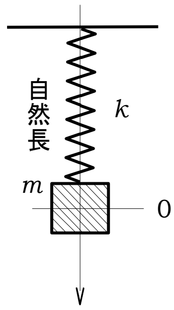
導出シリーズ 第 61 回　　鉛直なばねの単振動を考える



天井からばね定数 k [N/m] の軽いばねによりつるされた質量 m [kg] の小物体がある。ばねの自然長の位置に小物体を持ち上げ、静かに手を離した。小物体は上下に振動運動を始めた。この運動について解析してみよう。

ばねの自然長の位置を原点とする

まず、ばねが自然長の位置を原点と定め、鉛直下向きを x 軸正の向きとしよう。

ばねが自然長から x だけ伸びた位置における運動方程式を作ると $ma=-kx+mg$ であるから、小物体の加速度は $a=-\dfrac{k}{m}\cdot x+g$ である。このままでは**「加速度 a と変位 x の向きが反対向きであり、それらの大きさは比例している」**とはいえない。では、どのようにすれば良いのだろうか？　原点の位置を変えてみよう。

つりあいの位置を原点とすれば

小物体がばねにぶら下がりつりあう位置を原点としよう。つりあいの位置は自然長から x_0 [m] 伸びた位置とする。このとき、 $mg-kx_0=0$ の関係が成立するので、そのときのばねの伸びは $x_0=\dfrac{mg}{k}$ [m] である。

ばねが自然長から x_0 だけ伸びた位置を原点として、鉛直下向きに x の位置における運動方程式を作ると $ma=-k(x_0+x)+mg$ である。 $x_0=\dfrac{mg}{k}$ を代入して、小物体の加速度 a を求めるとは $a=-\dfrac{k}{m}\cdot x$ と望みどおりの**「加速度 a と変位 x の向きが反対向きであり、それらの大きさは比例している」**となる。**原点の位置を定めるのにコツがあるのだ！**

鉛直にぶら下げても、ばねに連結された小物体の運動は単振動！

ばねに連結された小物体の運動方程式から得られた $a=-\dfrac{k}{m}\cdot x$ を円運動を一方向から見た運動の加速度 $a_x=-\omega^2\cdot x$ と対比させると、円運動の角速度 ω に相当する物理量を「角振動数」と呼ぶ。よって、この運動での角振動数は $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ [rad/s] となる。

よって、 $x=R\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\delta\right)$ ・・・①、 $v=-R\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\delta\right)$ ・・・② と表現できる。ここで、現在のところ R と δ が未確定である。では、この未確定の値を決めるのは何だろうか？

初期条件を考えよ！

手を離したときが、最初の状態で、これを「初期条件」という。このときの時刻が $t=0$ 、位置が $x=-\dfrac{mg}{k}$ 、速度が $v=0$ だったから、①、②に代入して $-\dfrac{mg}{k}=R\cos\delta$ 、 $0=-R\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\sin\delta$ となり $R=-\dfrac{mg}{k}$ 、 $\delta=0$ であればよい。よって、時刻 t での小物体の位置は $x=-\dfrac{mg}{k}\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ 、速度は $v=\dfrac{mg}{k}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ である。また、この単振動の周期は $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。 **周期は水平でも鉛直でも同じになる！**