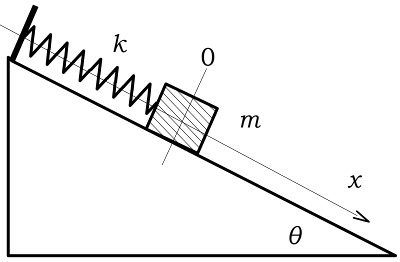
導出シリーズ　第62回　　斜め斜面でのばねの単振動を考える



傾斜角　θ　の斜面に取り付けられたばね定数 k [N/m] の軽いばねにつながれた質量　m　[kg] の 小物体がある。

ばねの自然長の位置まで、斜面に沿って小物体を持ち上げ、静かに手を離した。小物体は上下に振動運動を始めた。この運動について解析してみよう。

つりあいの位置を原点！

小物体がつりあう位置を原点とする。つりあいの位置は自然長から　x_0　[m] 伸びた位置とすると、　$mg\sin\theta - kx_0 = 0$　の関係が成立するので、そのときのばねの伸びは　$x_0 = \dfrac{mg\sin\theta}{k}$　[m] である。

ばねが自然長から　x_0　だけ伸びた位置を原点として、鉛直下向きに x の位置における運動方程式を作ると　$ma = -k(x_0 + x) + mg\sin\theta$　である。　$x_0 = \dfrac{mg\sin\theta}{k}$　を代入して、小物体の加速度 a を求めるとは　$a = -\dfrac{k}{m}\cdot x$　となる。この結果は、水平に置かれたばね、鉛直におかれたばねの場合と同一の結果だ。よって、**「加速度 a と変位 x の向きが反対向きであり、それらの大きさは比例している」**となっているので、この場合も単振動となることが分かる。

斜面に置かれたばねの場合も、ばねに連結された小物体の運動は単振動！

ばねに連結された小物体の運動方程式から得られた　$a = -\dfrac{k}{m}\cdot x$　を円運動を一方向から見た運動の加速度　$a_x = -\omega^2 \cdot x$　と対比させると、円運動の角速度　ω　に相当する物理量を「角振動数」と呼ぶ。よって、この運動での角振動数は　$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　[rad/s] となる。

よって、　$x = R\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \delta\right)$　・・・①、　$v = -R\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t + \delta\right)$　・・・② と表現できる。ここで、現在のところ　R　と　δ　が未確定である。では、この未確定の値を決めるのは何だろうか？

初期条件を考えよ！

手を離したときが、最初の状態で、これを「初期条件」という。このときの時刻が　$t=0$　、位置が　$x = -\dfrac{mg\sin\theta}{k}$　、速度が　$v=0$　だったから、①、②に代入して　$-\dfrac{mg\sin\theta}{k} = R\cos\delta$　、　$0 = -R\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\sin\delta$　となり　$R = -\dfrac{mg\sin\theta}{k}$　、　$\delta = 0$　であればよい。よって、時刻 t での小物体の位置は　$x = -\dfrac{mg\sin\theta}{k}\cdot\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$　、速度は　$v = \dfrac{mg\sin\theta}{k}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cdot\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$　である。また、この場合も、単振動の周期は　$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　と同じだ。　**周期は水平でも鉛直でも、斜めでも同じになっている！**

※ ばねの単振動の周期はどのような場合でも同じになると信じてよいのだろうか？　「だめです！」

どんな場合なんでしょうね？　探してみてくださいね。大学入試に出されたことがありますよ！