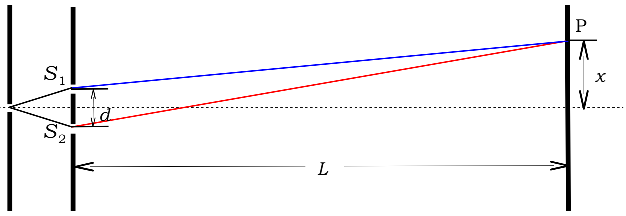
導出シリーズ　第63回　ヤングの実験(複スリットによる光の干渉編)

複スリットによる光の干渉を扱う実験として有名な「ヤングの実験」について、考察してみる。導出におけるアレンジは近似式の使い方の違いだけである。それぞれのケースについてどのような点が異なるのか目を通しておいて損はない。

基本は右図の複スリットのそれぞれの隙間からスクリーンまでの距離 S_1P(青)、S_2P(赤)の差を求め、それが波長の整数倍のとき「明線」、整数プラス2分の1倍のとき「暗線」となるという筋書きである。



この問題では、この距離の差を近似する部分だけがアレンジということになる。距離そのものはピタゴラスの定理(三平方の定理)を使えば、

$S_1P=\sqrt{L^2+\left(x-\dfrac{d}{2}\right)^2}$　、　$S_2P=\sqrt{L^2+\left(x+\dfrac{d}{2}\right)^2}$　である。

距離の差　$S_2P-S_2P=\sqrt{L^2+\left(x+\dfrac{d}{2}\right)^2}-\sqrt{L^2+\left(x-\dfrac{d}{2}\right)^2}$　を、$L\gg x,d$　の条件で近似する。

教科書では、$x\approx 0$　のとき　$\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x$　という近似を使うものが多い。この場合では、

$S_2P-S_2P=L\cdot\sqrt{1+\left(\dfrac{x+\frac{d}{2}}{L}\right)^2}-L\cdot\sqrt{1+\left(\dfrac{x-\frac{d}{2}}{L}\right)^2}$　として、$\left(\dfrac{x+\frac{d}{2}}{L}\right)^2,\left(\dfrac{x-\frac{d}{2}}{L}\right)^2\approx 0$　よりルートを外す道筋である。よって　$S_2P-S_2P\approx L\cdot\left\{1+\dfrac{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}{2L^2}\right\}-L\cdot\left\{1+\dfrac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{2L^2}\right\}$　だから、整理して

$S_2P-S_2P\approx\dfrac{xd}{L}$　が得られる。よって、明線の条件は　$\dfrac{xd}{L}=m\lambda$　(ただし、m は整数)、暗線の条件　$\dfrac{xd}{L}=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$　(ただし、m は整数)である。よって、明線の位置は　$x=\dfrac{mL\lambda}{d}$　(ただし、m は整数)、暗線の位置は　$x=\dfrac{(2m+1)L\lambda}{2d}$　(ただし、m は整数)である。

分子の有理化を行う方法もある。この場合は　$x\approx 0$　のとき　$\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x$　という近似を使わず求めることができる。　$S_2P-S_2P=\dfrac{\left\{L^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2\right\}-\left\{L^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2\right\}}{\sqrt{L^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}+\sqrt{L^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}}$　より、これを整理して、

$S_2P-S_2P=\dfrac{2xd}{\sqrt{L^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2}+\sqrt{L^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}}$　である。$L^2\gg\left(x\pm\dfrac{d}{2}\right)^2$　より、小さいほうを無視して　$S_2P-S_2P\approx\dfrac{2xd}{\sqrt{L^2}+\sqrt{L^2}}=\dfrac{xd}{L}$　である。これ以降の説明は同じだから省略しよう。

その他の導出方法もあるが、紙面が尽きたのでこれにて終了としよう。