

導出シリーズ 第65回 万有引力による位置エネルギーの公式

「重力による位置エネルギーの公式」 $U = mgh$ については誰でも知っている。しかし、その元になる「万有引力による位置エネルギーの公式」 $U = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$ (位置エネルギーの基準点は無限遠方) については知らない人も多い。

地球表面上付近での万有引力による位置エネルギーを考えることで重力による位置エネルギーの公式は導き出せる。まずは、これから考えてみよう。

[万有引力による位置エネルギーから重力による位置エネルギーへ]

地球の質量 M 、半径 R 、物体の質量 m とすると、万有引力による位置エネルギーは、地球表面上では $U_0 = -G \frac{M \cdot m}{R}$ であり、地上から高さ h のところでの万有引力による位置エネルギーは、地球表面上では $U_0 = -G \frac{M \cdot m}{R+h}$ である。

地上を基準とする重力による位置エネルギーを求めると $U - U_0 = \left(-G \frac{M \cdot m}{R+h}\right) - \left(-G \frac{M \cdot m}{R}\right)$ であるから、 $U - U_0 = G \frac{M \cdot m \cdot h}{R(R+h)}$ である。地上からの高さ h は地球の半径 R (6万4千km)

より高さ h はずっと小さい(数km未満)ことから、 $U - U_0 = G \frac{M \cdot m \cdot h}{R(R+h)} \approx G \frac{M \cdot m \cdot h}{R^2}$ と表せる。

また、地上での万有引力は重力に相当するから $G \frac{M \cdot m}{R^2} = mg$ であるので、地上を基準とする重力による位置エネルギーは $U - U_0 \approx mgh$ とおなじみの形に表すことができるのだ。

[万有引力による位置エネルギーの公式] 上で使用した「万有引力による位置エネルギーの公式」はどのようにして導出するのだろうか？位置エネルギーとは「基準点からその位置まで運ぶときに必要な仕事の量」と定義する。よって、この定義に基づき計算してみよう。

万有引力による位置エネルギーでは無限遠方を基準としている。これを使って導出してみよう。

[積分による方法] 質量 M 、 m の2つの物体が距離 x 離れている位置での万有引力の大きさは $f = G \frac{M m}{x^2}$ である。ここで、 x から $x - \Delta x$ の位置に動かすときの仕事 ΔW を求めると

$\Delta W = f \times \Delta x = G \frac{M m}{x^2} \times \Delta x$ であり、 Δx の極限を取ると $dW = G \frac{M m}{x^2} dx$ と表せる。

無限遠方から距離 r にまで運ぶ仕事は、両辺を積分して求めると $\int dW = \int_{\infty}^r G \frac{M m}{x^2} dx$ であ

る。積分を実行して $W = \left[-G \frac{M m}{x}\right]_{\infty}^r$ だから、その仕事は $W = -G \frac{M m}{r}$ である。よって、万

有引力による位置エネルギーの公式は $U = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$ (位置エネルギーの基準点は無限遠方) となることが導出できた。

[積分を使わない方法] 数列の和を利用する「教科書で説明している方法」を使うこともできる。この導出方法のほうが数学的にはテクニックが必要(数列の和を求めるテクニック)となる。しかし、紙面が尽きてきたので、この導出方法については、教科書の記述で代えさせていただくことにしよう。ぜひ、教科書の説明を読んでください。