導出シリーズ　第 66 回　　音速の公式を導く！

空気中を伝わる音の速さは室温で約 340m/s であると言われています。正確な音の速さの公式として「$v=331.5+0.6t$（温度 t ℃のとき）」がよく知られています。

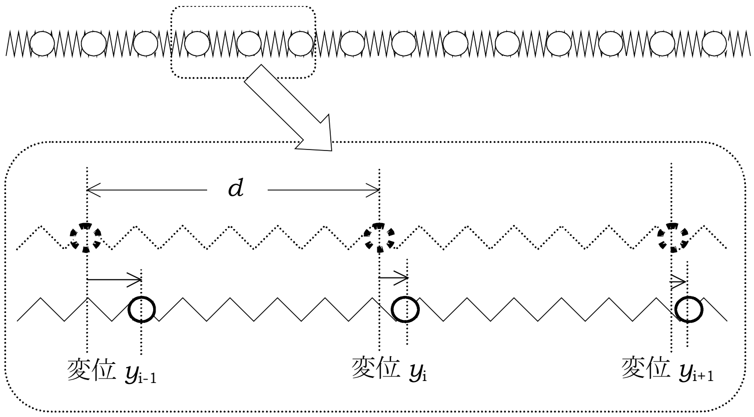
この公式は、理論的に導出することができるのでしょうか？

物理の法則としては、**「気体の状態方程式」**は外せないでしょう。また、音の振動は非常に速い変化なので、**「断熱変化」**と考えて間違いはないので、この当たりから糸口を探し出しましょう。

空気の疎密が伝達するものが音である。**「空気のブロック」**を考え**「運動方程式」**で示すことができる。

気体の状態方程式　$PV=nRT$

断熱変化の公式　$PV^{\gamma}=$ 一定　ただし、$\gamma=\dfrac{C_P}{C_V}$　（定圧モル比熱と定積モル比熱の比で空気の場合は 1.4）



気体のモデルを質量 m [kg] の小球が右の図に示すように間隔 d [m] でばねにつなげられているように考える。ばねは空気の圧力による力と考えれば良い。

音が伝わる時間は非常に短いので熱が伝達する時間がないので状態変化は断熱変化と考えてよい。したがって、気体の圧力と体積の関係　$PV^{\gamma}=$ 一定 …① が成立する。

i番目の小球に注目する。i番目の小球の変位 y_i [m] とすると、断熱変化の関係式①より、$P_0(Sd)^{\gamma}=P\{S(d-y_{i-1}+y_i)\}^{\gamma}$ が成立する。 整理すると、左からの圧力は $P=P_0\left(1-\dfrac{y_{i-1}-y_i}{d}\right)^{-\gamma}$ である。変位 x は間隔 d に比べて十分に小さいので近似式　$(1+x)^{\alpha}\simeq 1+\alpha x$ を使うと、$P_0\left(1-\dfrac{y_{i-1}-y_i}{d}\right)^{-\gamma}=P_0\left(1+\dfrac{\gamma(y_{i-1}-y_i)}{d}\right)$ であるから、

左からの圧力は $P=P_0+\dfrac{\gamma(y_{i-1}-y_i)}{d}P_0$ [N/m] である。

同様にして、右からの圧力は $P=P_0+\dfrac{\gamma(y_i-y_{i+1})}{d}P_0$ [N/m] である。

i番目の小球が受ける力は左右の圧力からの力であるので、力と圧力の関係　$F=PS$ を使って求めると、

$f=\left(P_0+\dfrac{\gamma(y_{i-1}-y_i)}{d}P_0\right)S-\left(P_0+\dfrac{\gamma(y_i-y_{i+1})}{d}P_0\right)S$ より、$f=\gamma\left\{\dfrac{(y_{i-1}-y_i)-(y_i-y_{i+1})}{d}\right\}P_0S$ だ。

i番目の小球の質量に相当する気体は $P_0Sd=nRT$ を満たすので、そのモル数は $n=\dfrac{P_0Sd}{RT}$ と考えてよい。気体の分子量を Mとすると、小球に相当する空気の質量は $m=\dfrac{nM}{1000}=\dfrac{MP_0Sd}{1000RT}$ だから、$ma=f$ に代入して、運動方程式は $\dfrac{MP_0Sd}{1000RT}\cdot a=\gamma\left\{\dfrac{(y_{i-1}-y_i)-(y_i-y_{i+1})}{d}\right\}P_0S$ …① である。

運動方程式① を解いて、加速度を求めると、$a=\dfrac{1000RT\gamma}{Md}\left\{\dfrac{(y_{i-1}-y_i)-(y_i-y_{i+1})}{d}\right\}$ …② になる。 右辺を変形すると $a=\dfrac{1000RT\gamma}{M}\left\{\dfrac{\dfrac{(y_{i+1}-y_i)}{d}-\dfrac{(y_i-y_{i-1})}{d}}{d}\right\}$ となる。

また、左辺の加速度は、単振動運動だから、振動数を f [Hz] とすると、$a=-\omega^2 y$ 、$\omega=2\pi f$ だから、加速度は $a=-(2\pi f)^2 y$ である。また、$y_i=y(x)$ とすると、$y_{i-1}=y(x-d)$ 、$y_{i+1}=y(x+d)$ であり、d が微少なので $\frac{(y_{i+1}-y_i)}{d}=\frac{\{y(x+d)-y(x)\}}{d}=\frac{dy_i}{dx}$ だから $\left\{\frac{\frac{(y_{i+1}-y_i)}{d}-\frac{(y_i-y_{i-1})}{d}}{d}\right\}=\left\{\frac{\frac{dy_i}{dx}-\frac{dy_{i-1}}{dx}}{d}\right\}=\frac{d^2y}{dx^2}$ と見なせる。

加速度の式②は、上の関係式を代入して $-(2\pi f)^2 y=\frac{1000RT\gamma}{M}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$ になる。

これを整理して $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(2\pi f)^2 M}{1000RT\gamma}y$ が成立する。波の波長を λ とすると、$y=A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ と表せるので、$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2}y$ となる。これを代入して、$\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2}=\frac{(2\pi f)^2 M}{1000RT\gamma}$ が成立する。

これより、波長と振動数の項をまとめて整理すると、$(f\lambda)^2=\frac{1000RT\gamma}{M}$ になる。 波の公式 $v=f\lambda$ の公式より、空気中の音波の速さは $v=\sqrt{\frac{1000RT\gamma}{M}}$ になる。

温度を t ℃とすると、$v=\sqrt{\frac{1000R(273+t)\gamma}{M}}=\sqrt{\frac{273000R\gamma}{M}}\sqrt{\frac{273+t}{273}}$ である。空気は窒素 80%、酸素 20%で構成されているので、窒素と酸素の分子量の加重平均値 $M=28\times0.8+32\times0.2=28.8$ をとることで空気の分子量と見なせる。また空気（窒素、酸素）は多原子分子だから、$\gamma=\frac{C_P}{C_V}=\frac{7}{2}R\div\frac{5}{2}R=1.40$ より、

$\sqrt{\frac{273000R\gamma}{M}}=\sqrt{\frac{273000\times8.3\times1.4}{28.8}}=332.0\ldots$ である。また、近似式 $(1+x)^\alpha\simeq1+\alpha x$ を使って、展開すると $v=332\times\sqrt{\frac{273+t}{273}}=332\left(1+\frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}=332\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{t}{273}\right)=332+0.6t$ となる。

理論的に求めた空気中の音速の大きさ $v=332+0.6t$ [m/s]

［参考］ 実測値としての空気中の音速が $v=331.5+0.6t$ である。 理論値を求める過程でそれぞれ代入した数値の有効数字の桁数が3桁であることから考えると、理論値と実測値は見事にまで正確に一致しているといえる。

［ヘリウムなどの単原子分子気体の場合］

ヘリウムは分子量は４の単原子分子気体である。定積モル比熱 $C_V=\frac{3}{2}R$ 、定圧モル比熱 $C_P=\frac{5}{2}R$ だから $\gamma=\frac{C_P}{C_V}=\frac{5}{2}R\div\frac{3}{2}R=1.67$ となる。よって、$\sqrt{\frac{273000R\gamma}{M}}=\sqrt{\frac{273000\times8.31\times1.67}{4}}=973.2\ldots$ より t ℃のヘリウム中での音速は $v_{He}=973\left(1+\frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}=973+\frac{973}{2\times273}\times t=973+1.8t$ [m/s] となる。

0℃のヘリウム中の音速の実際の値は 970[m/s] である。この場合でも、理論から非常に近い値が出てくることがわかる。