導出シリーズ　第67回　断熱変化の公式を導く！

気体の変化の公式、理想気体の状態方程式 $PV=nRT$ は誰でも知っている重要な公式である。しかし、断熱変化の公式 $PV^{\gamma}=$ 一定 （ただし、 $\gamma=\dfrac{C_P}{C_V}$ ）はそれほど知られていない。そこで、今回はこの「断熱変化の公式」を導出すことを考えてみよう。

［微積分法を用いた断熱変化の公式の導出］

最初に、1モルの理想気体の状態を $P,\ V,\ T$ とする。使用する公式は、もちろん、理想気体の状態方程式 $PV=RT$ ・・・① 、熱力学の第一法則 $\Delta U=Q+W$ ・・・② 、内部エネルギーの公式より $\Delta U=C_V\Delta T$ ・・・③ の3つである。

最初の状態 $P,\ V,\ T$ から、気体の圧力を $P+\Delta P$ に変化させたとき、体積が $V+\Delta V$ 、温度が $T+\Delta T$ になったとする。当然、この変化の過程において熱の出入りはない。

このとき、気体が外部から受けた仕事は $W=-P\Delta V$ である。断熱変化だからその間に流入する熱はない。よって、熱力学第一法則より $\Delta U=0-P\Delta V$ の関係が成立する。

内部エネルギーの公式より $\Delta U=C_V\Delta T$ だから $-P\Delta V=C_V\Delta T$ が成立する。

①を使って圧力 P を消去すると $-\dfrac{RT}{V}\Delta V=C_V\Delta T$ より $\dfrac{\Delta T}{\Delta V}=-\dfrac{RT}{C_V V}$ である。変化が微小であるとすると、 $\dfrac{dT}{dV}=-\dfrac{RT}{C_V V}$ の微分方程式が成立するから、この微分方程式を解けば良いだけになった[1]。これ以降は、物理の問題ではなく、数学の力だけが必要となったのだ。

［微分方程式を解く］

この微分方程式は「変数分離法」を使えば解けるものであるので、両辺に変数を分離して、積分すると $\displaystyle\int\frac{dT}{RT}=-\int\frac{dV}{C_V V}$ となる。これを積分実行すると $\dfrac{1}{R}\log|T|=-\dfrac{1}{C_V}\log|V|+C$ （Cは積分定数）が得られる。

①を使って、温度 T を消去すると、 $\dfrac{1}{R}\log\left|\dfrac{PV}{R}\right|=-\dfrac{1}{C_V}\log|V|+C$ である。ここで、変数はすべて正なので、絶対値記号を外し、整理すると $C_V\log P+(C_V+R)\log V=C_V(CR+\log R)$ となる。

ここで、 $C_P=C_V+R$ 、 $\gamma=\dfrac{C_P}{C_V}$ を使って整理すると $\log P+\gamma\log V=CR+\log R$ となる。対数を指数に変換して $PV^{\gamma}=e^{CR+\log R}$ とあらわすことが出来る。右辺はすべて定数よりなるから、断熱変化の公式 $PV^{\gamma}=$ 一定 （ただし、 $\gamma=\dfrac{C_P}{C_V}$ ）が導かれたことになる。

1　微分方程式の解法については、「物理の小道（http://tachiro.client.jp/）」の「番外編」にて詳しく解説していますのでご覧ください。