導出シリーズ 第74回 「コンプトン効果」

アインシュタインの「光量子説」

光の振動数を ν 、波長を λ 、光速を c とすると、1粒の光子のエネルギーは $E=h\nu=\dfrac{hc}{\lambda}$（$h$ はプランク定数）、運動量は $p=\dfrac{h\nu}{c}=\dfrac{h}{\lambda}$ （h はプランク定数）と表すことができる。

ド・ブロイの「物質波理論」

ド・ブロイの「物質波理論」によると、プランク定数 h 、電子の質量 m 、電子の速度 v とすると電子が示す波の波長 λ は、 $\lambda=\dfrac{h}{mv}$ と表すことが出来るというものである。また、電子の運動量は $p=mv$ である。

「コンプトン効果」による 散乱X線波長の変化 $\Delta\lambda=\dfrac{h}{mc}(1-\cos\theta)$

「コンプトン効果」とは、グラファイト（黒鉛）にＸ線を照射したとき、「散乱されたＸ線の波長が長くなる」現象をいう。これは、Ｘ線光子とグラファイト中の電子との衝突による効果により起こる。

入射Ｘ線の波長を λ 、衝突する電子の質量を m 、電気素量を e とする。Ｘ線光子と電子の衝突で、入射Ｘ線が入射方向から θ ずれた方向に散乱されたとする。同時に電子は α 方向に速度 v で散乱されたとする。

この衝突において運動量保存の法則が成立するので、入射Ｘ線方向の運動量保存の法則から $\dfrac{h}{\lambda}=\dfrac{h}{\lambda'}\cdot\cos\theta+mv\cos\alpha$ ・・・①が成立する。また、入射Ｘ線に垂直な方向の運動量保存の法則から $0=\dfrac{h}{\lambda'}\cdot\sin\theta-mv\sin\alpha$ ・・・② も成立する。また、この衝突は弾性衝突であるので、エネルギー保存の法則が成立する。よって、 $\dfrac{hc}{\lambda}=\dfrac{hc}{\lambda'}+\dfrac{1}{2}mv^2$ ・・・③ も成立する。

跳ね飛ばされた電子の速度 v 、その角度 α は測定不可能なのでこれらを消去しよう。

①、②より、 $\left(\dfrac{h}{\lambda}-\dfrac{h}{\lambda'}\cdot\cos\theta\right)^2=(mv\cos\alpha)^2$ 、 $\left(\dfrac{h}{\lambda'}\cdot\sin\theta\right)^2=(mv\sin\alpha)^2$ となるから、辺々足算して角度 α を消去すると、 $\left(\dfrac{h}{\lambda}-\dfrac{h}{\lambda'}\cdot\cos\theta\right)^2+\left(\dfrac{h}{\lambda'}\sin\theta\right)^2=m^2v^2$ ・・・④ である。③を使って速度 v を消去すると、 $\left(\dfrac{h}{\lambda}-\dfrac{h}{\lambda'}\cdot\cos\theta\right)^2+\left(\dfrac{h}{\lambda'}\sin\theta\right)^2=2m\left(\dfrac{hc}{\lambda}-\dfrac{hc}{\lambda'}\right)$ が得られる。これを整理すると $\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda'}\cdot\cos\theta\right)^2+\left(\dfrac{1}{\lambda'}\sin\theta\right)^2=\dfrac{2mc}{h}\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda'}\right)$ より $\dfrac{\lambda'}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\lambda'}-2\cos\theta=\dfrac{2mc}{h}(\lambda'-\lambda)$ である。

ここで、波長の変化は小さいので $\lambda\approx\lambda'$ であるから、 $\dfrac{\lambda'}{\lambda}+\dfrac{\lambda}{\lambda'}\approx 2$ と近似できる。

以上より、入射Ｘ線の波長の変化は $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda=\dfrac{h}{mc}(1-\cos\theta)$ となることがわかる。